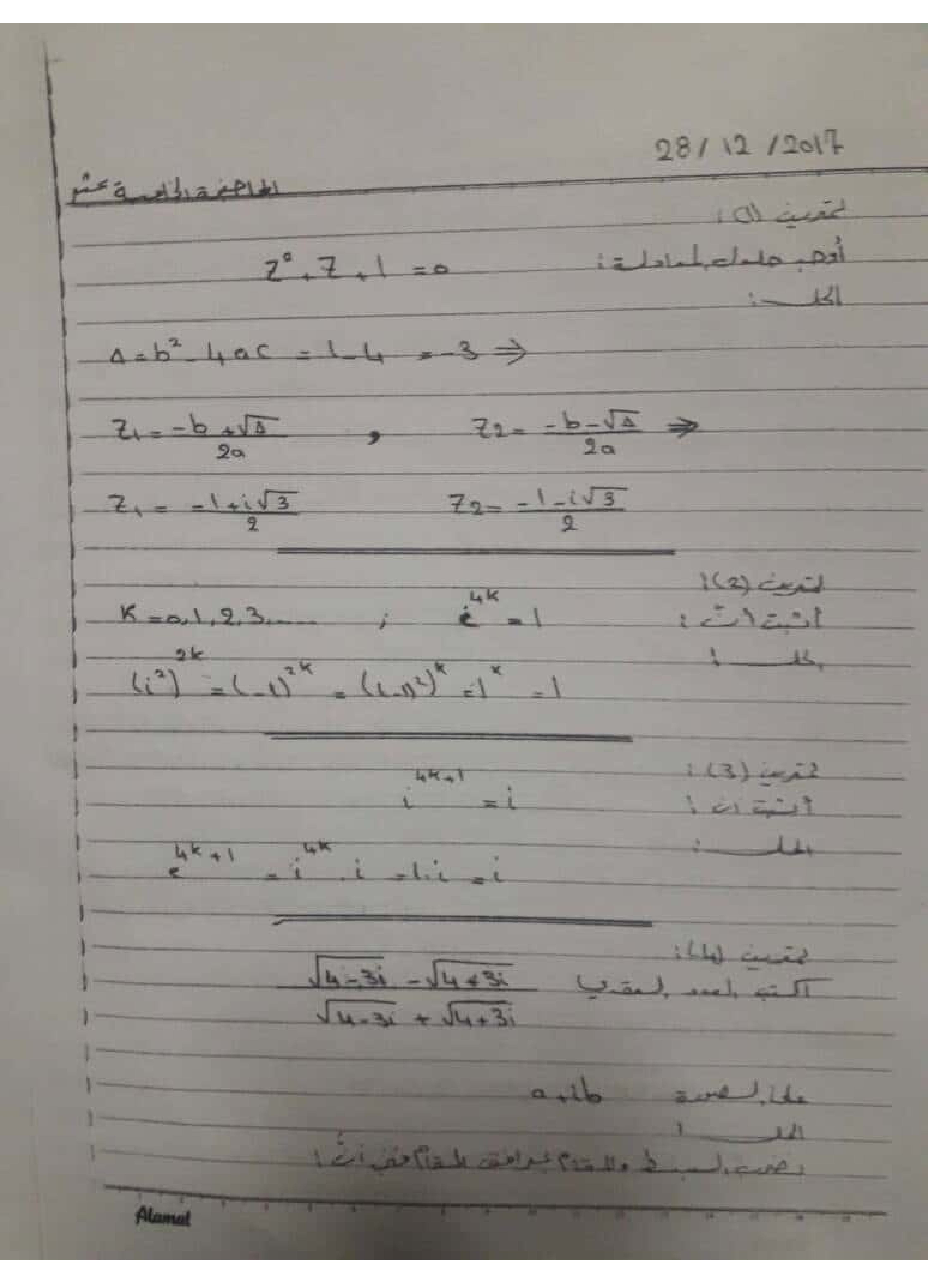


28/12/2017

المحاضرة الخامسة عشر

تمرين (1):

أوجد حلول المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

الحل:

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \Rightarrow$

$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$

$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

تمرين (2):

أثبت أن: $i^{4k} = 1$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

الحل:

$(i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$

تمرين (3):

أثبت أن: $i^{4k+1} = i$

الحل:

$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i$

تمرين (4):

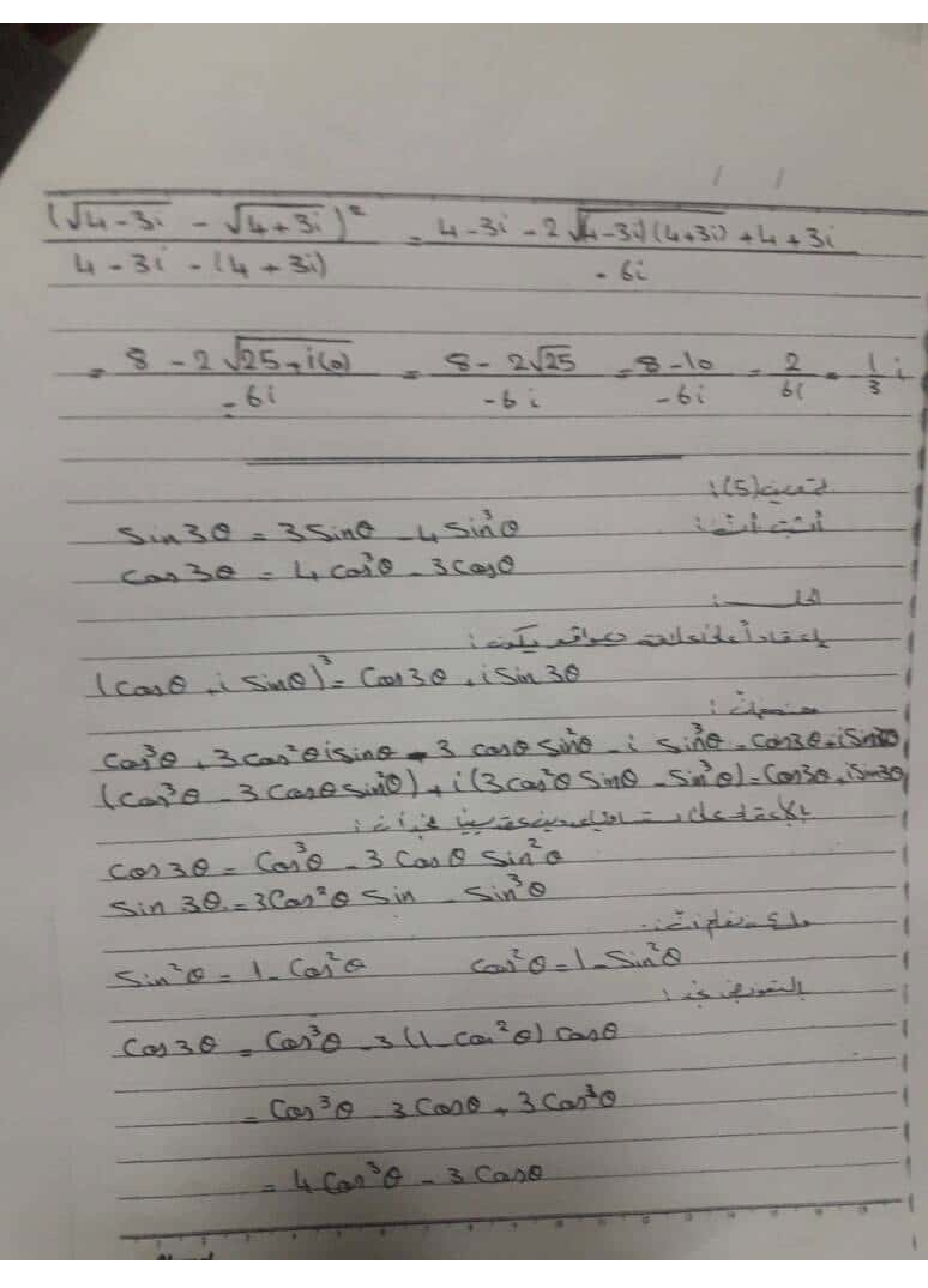
اكتب العدد المعقد $\frac{\sqrt{4-3i} - \sqrt{4+3i}}{\sqrt{4-3i} + \sqrt{4+3i}}$

على الصورة $a + ib$

الحل:

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام فنجد أن:

Alamal



$$\frac{(\sqrt{4-3i}-\sqrt{4+3i})^2}{4-3i-(4+3i)} = \frac{4-3i-2\sqrt{(4-3i)(4+3i)}+4+3i}{-6i}$$

$$= \frac{8-2\sqrt{25+i(0)}}{-6i} = \frac{8-2\sqrt{25}}{-6i} = \frac{8-10}{-6i} = \frac{2}{6i} = \frac{1}{3}i$$

تمرين (5):

أثبت أن:

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل:

بالاعتماد على علاقة ديموافر يكون:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

ومنه:

$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

بالمطابقة ... نجد:

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin - \sin^3\theta$

ملاحظة مهمة:

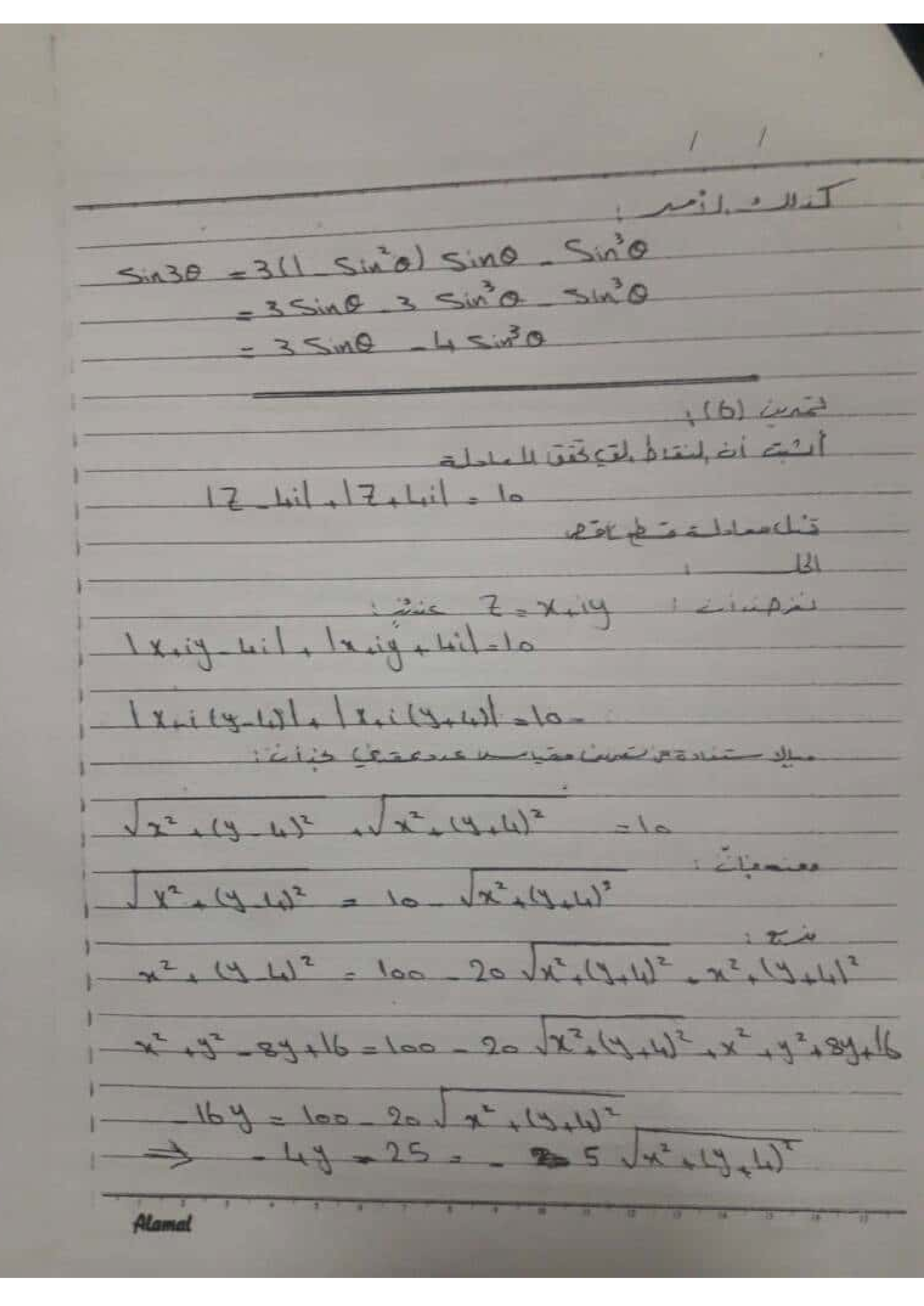
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

بالتعويض نجد:

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$



/ /

كذلك الأمر:

$$\sin 3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

تمرين (6):

أثبت أن النقاط التي تحقق المعادلة

$$|z - 4i| + |z + 4i| = 10$$

تشكل معادلة قطع ناقص

الحل:

نفرض أن: $z = x + iy$ عندئذٍ:

$$|x + iy - 4i| + |x + iy + 4i| = 10$$

$$|x + i(y-4)| + |x + i(y+4)| = 10$$

وبالاستفادة من تعريف مقياس عدد عقدي نجد أن:

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + (y+4)^2} = 10$$

ومنه نجد:

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+4)^2}$$

نربع:

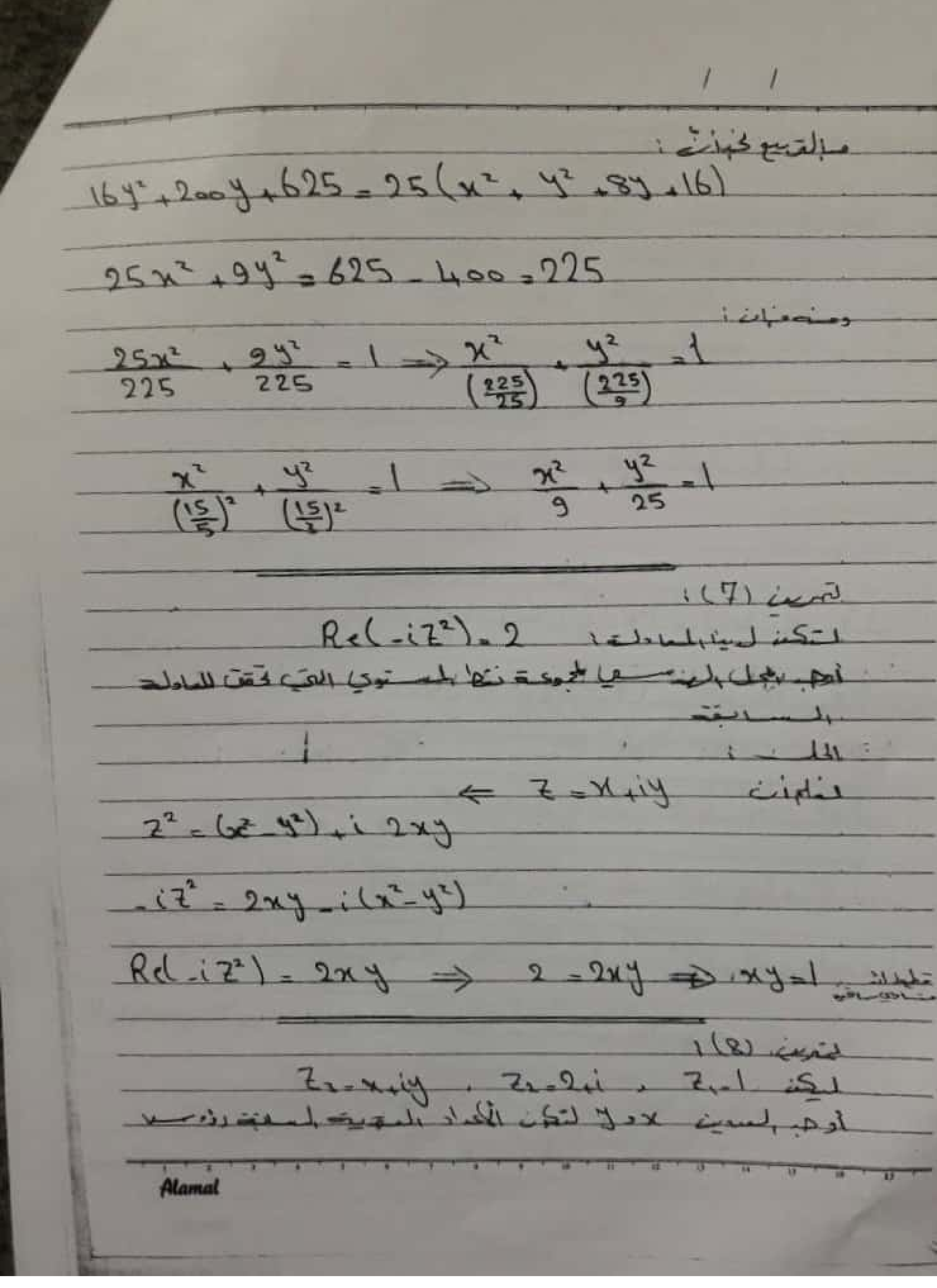
$$x^2 + (y-4)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+4)^2} + x^2 + (y+4)^2$$

$$x^2 + y^2 - 8y + 16 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+4)^2} + x^2 + y^2 + 8y + 16$$

$$-16y = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+4)^2}$$

$$\Rightarrow -4y = 25 = -5\sqrt{x^2 + (y+4)^2}$$

Alamal



/ /

بالتربيع نجد أن:

$$16y^2 + 200y + 625 = 25(x^2 + y^2 + 8y + 16)$$

$$25x^2 + 9y^2 = 625 - 400 = 225$$

ومنه نجد أن:

$$\frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{225}{25}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{225}{9}\right)} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{15}{5}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{15}{3}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

تمرين (7):

لتكن لدينا المعادلة: $Re(-iz^2) = 2$

أوجد المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي تحقق المعادلة السابقة.

الحل:

نعلم أن $z = x + iy \Leftarrow$

$$z^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$$

$$-iz^2 = 2xy - i(x^2 - y^2)$$

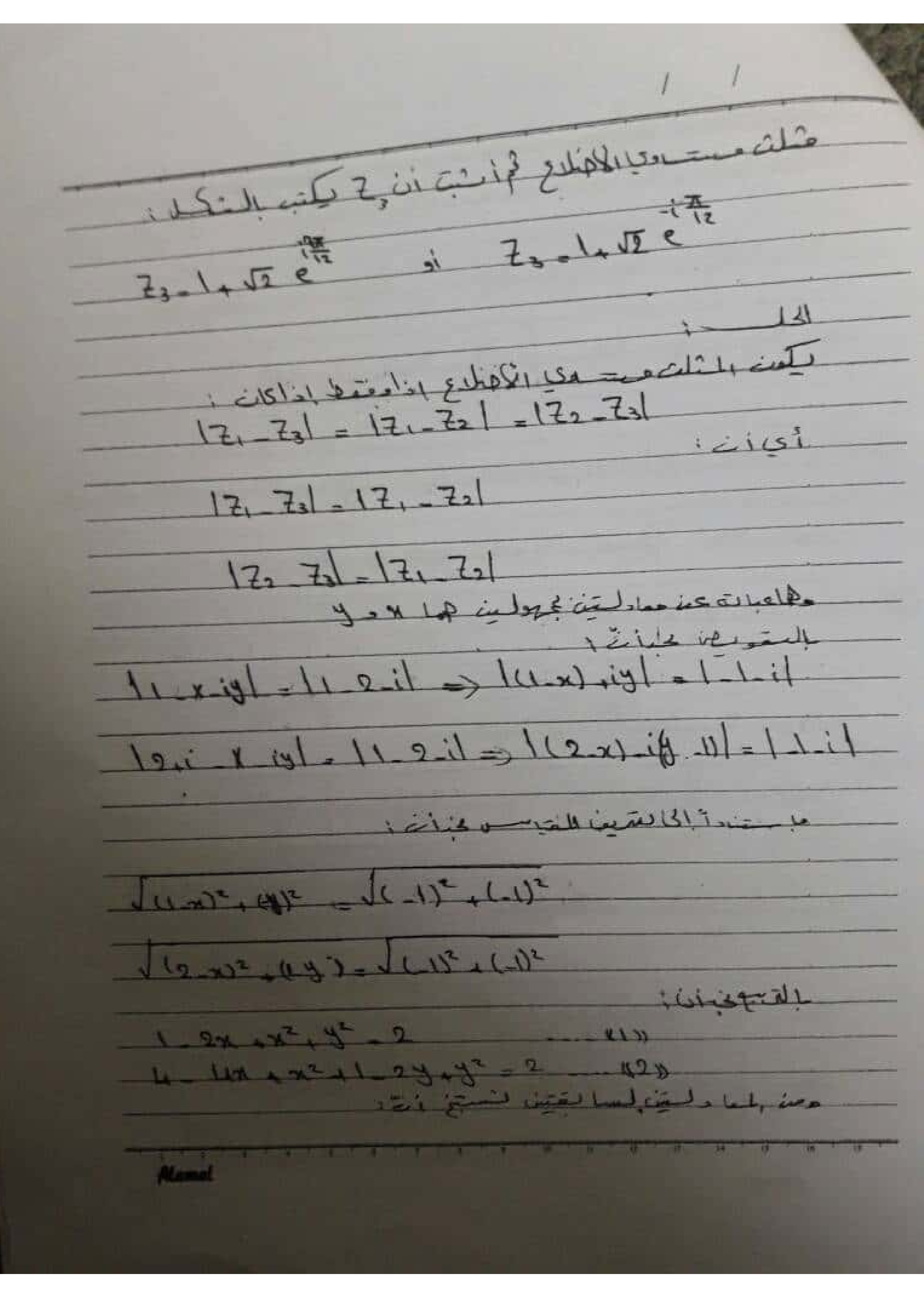
$$Re(-iz^2) = 2xy \Rightarrow 2 = 2xy \Rightarrow xy = 1$$ تمثل قطعاً زائداً متساوي الساقين

تمرين (8):

ليكن $z_1 = 1$ ، $z_2 = 2 + i$ ، $z_3 = x + iy$

أوجد العددين x و y لتكون الأعداد المركبة السابقة رؤوس

Alamal



مثلث متساوي الأضلاع ثم أثبت أن z_3 يكتب بالشكل:

$z_3 = 1 + \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أو $z_3 = 1 + \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$

الحل:

يكون المثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان:

$|z_1 - z_3| = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$

أي أن:

$|z_1 - z_3| = |z_1 - z_2|$

$|z_2 - z_3| = |z_1 - z_2|$

وهي عبارة عن معادلتين بمجهولين هما x و y

بالتعويض نجد أن:

$|1 - x - iy| = |1 - 2 - i| \Rightarrow |(1-x) - iy| = |-1 - i|$

$|2 + i - x - iy| = |1 - 2 - i| \Rightarrow |(2-x) - i(y-1)| = |-1 - i|$

باستخدام العلاقتين للقياس نجد أن:

$\sqrt{(1-x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

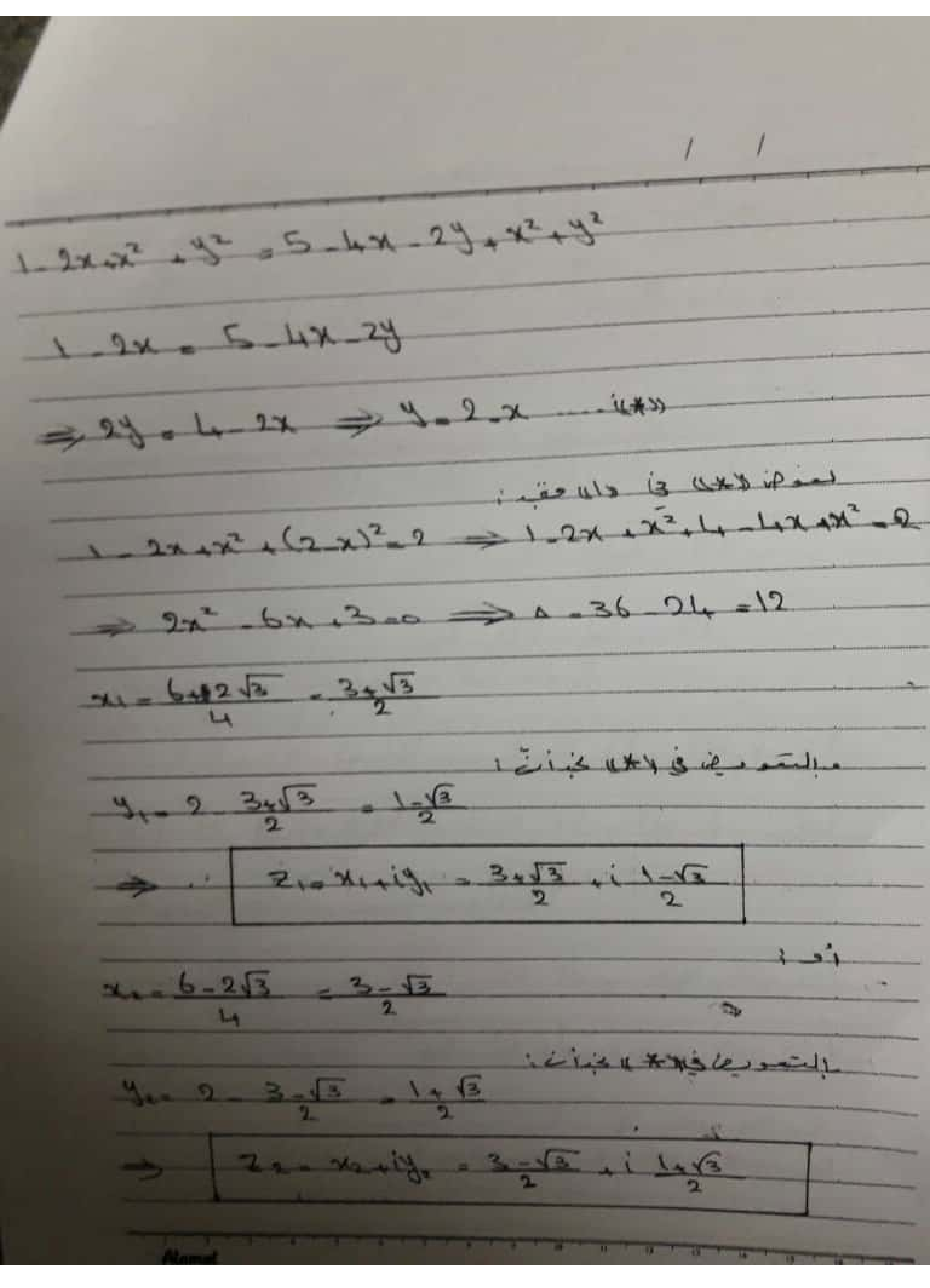
$\sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

بالتربيع نجد أن:

$1 - 2x + x^2 + y^2 = 2$ ......«1»

$4 - 4x + x^2 + 1 - 2y + y^2 = 2$ ......«2»

ومن المعادلتين السابقتين نستنتج أن:



$1-2x+x^2+y^2=5-4x-2y+x^2+y^2$

$1-2x=5-4x-2y$

$\Rightarrow 2y=4-2x \Rightarrow y=2-x \quad \ldots ((*))$

نعوض ((*)) في داله عقب :

$1-2x+x^2+(2-x)^2=2 \Rightarrow 1-2x+x^2+4-4x+x^2=2$

$\Rightarrow 2x^2-6x+3=0 \Rightarrow \Delta=36-24=12$

$x_1=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

بالتعويض في ((*)) نجد أن :

$y_1=2-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{z_1=x_1+iy_1=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}}$

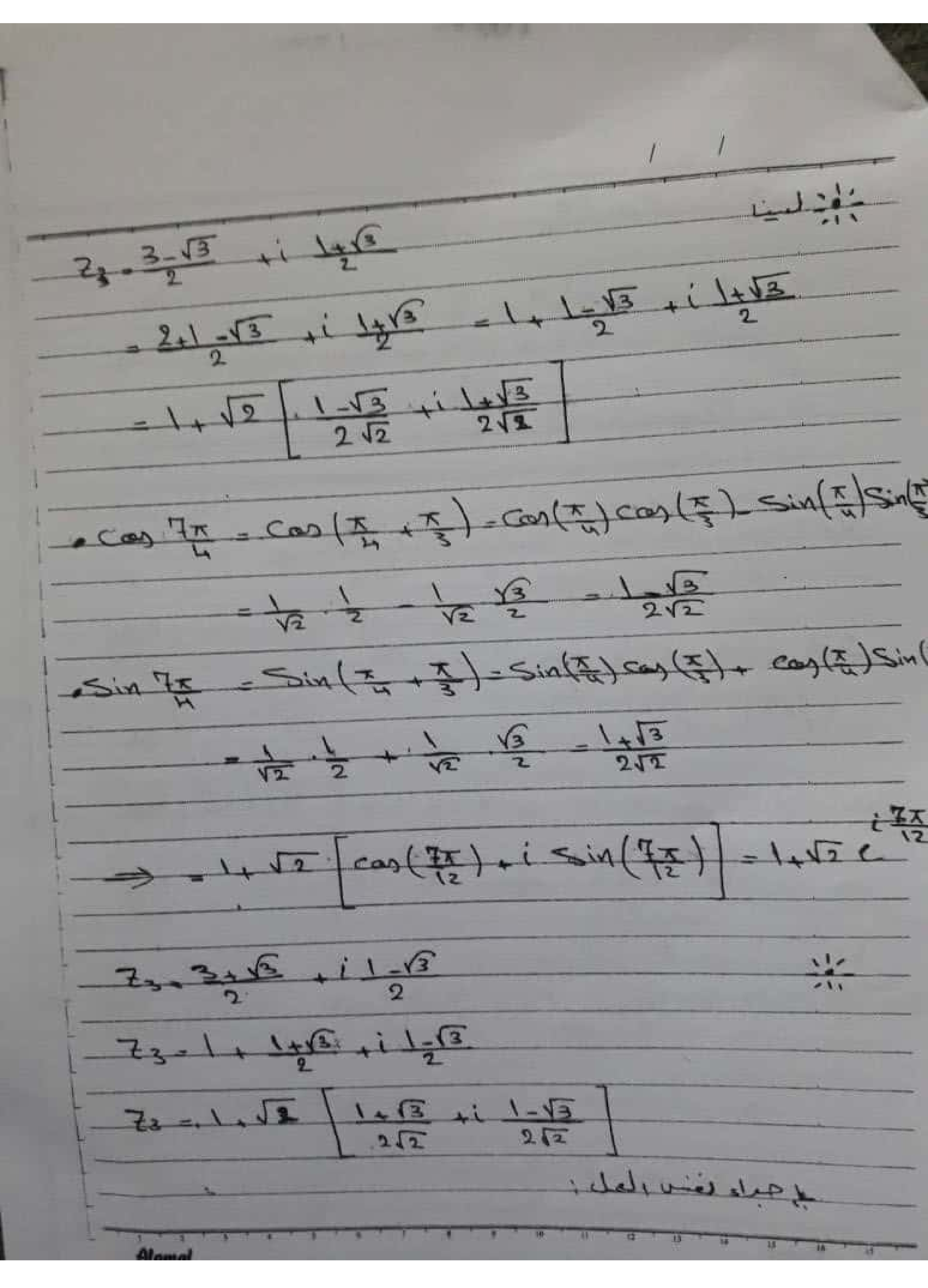
أو :

$x_2=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

بالتعويض في ((*)) نجد أن :

$y_2=2-\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{z_2=x_2+iy_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$



/ /

الحل:

$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2+1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$= 1 + \sqrt{2}\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$

• $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

• $\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

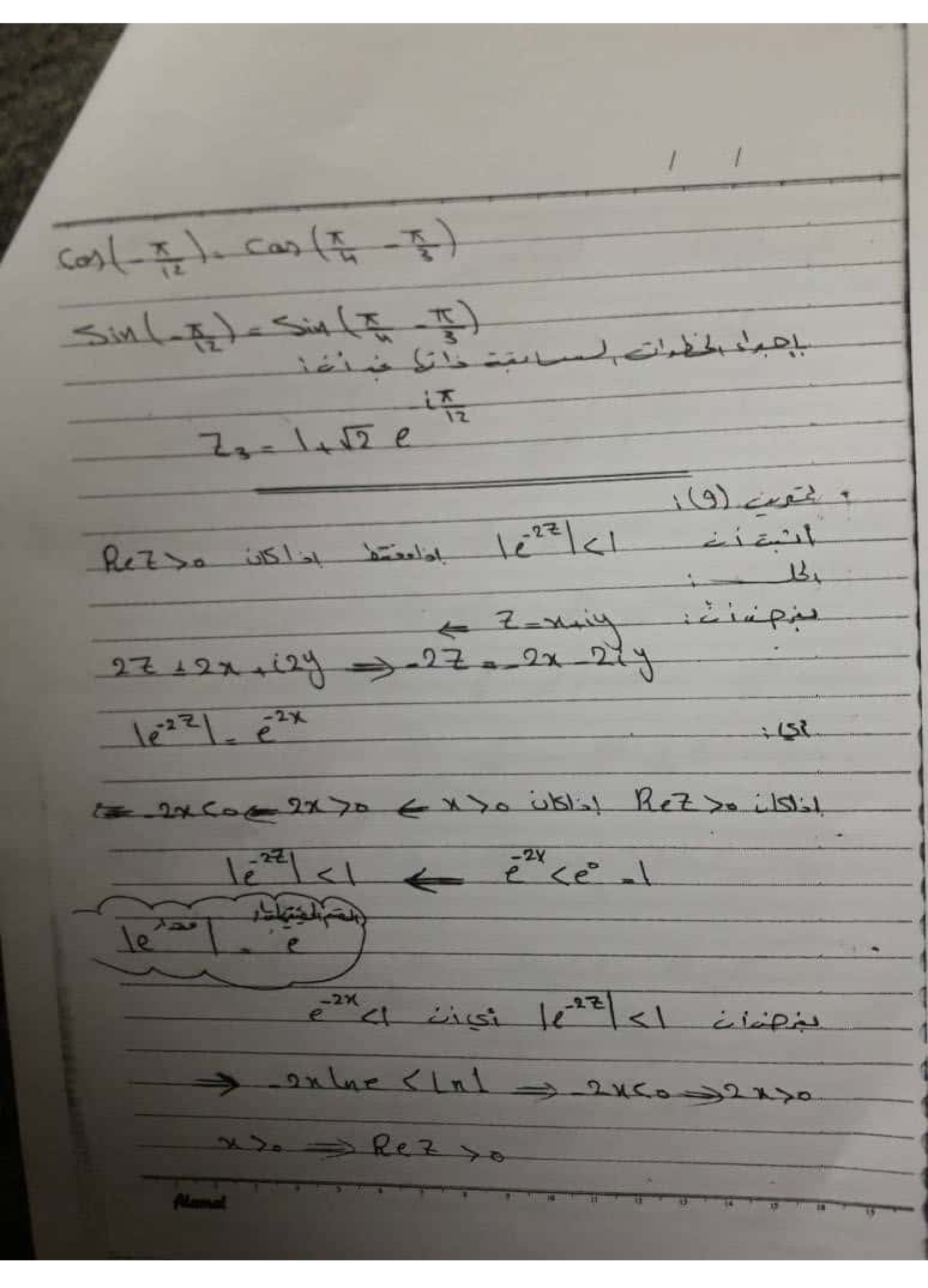
$\Rightarrow = 1+\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = 1+\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = 1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = 1+\sqrt{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$

بإجراء نفس الحل:



$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$

$\sin(-\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$

بإجراء الخطوات السابقة ذاتها نجد أن:

$Z_3 = 1 + \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$

• تمرين (9):

أثبت أن: $|e^{-2Z}|<1$ إذا وفقط إذا كان $Re Z>0$

الحل:

نفرض أن: $Z = x + iy \Leftarrow$

$2Z = 2x + i2y \Rightarrow -2Z = -2x - 2iy$

أي: $|e^{-2Z}| = e^{-2x}$

إذا كان $Re Z>0$ إذا كان $x>0 \Leftarrow 2x>0 \Leftarrow -2x<0 \Leftarrow$

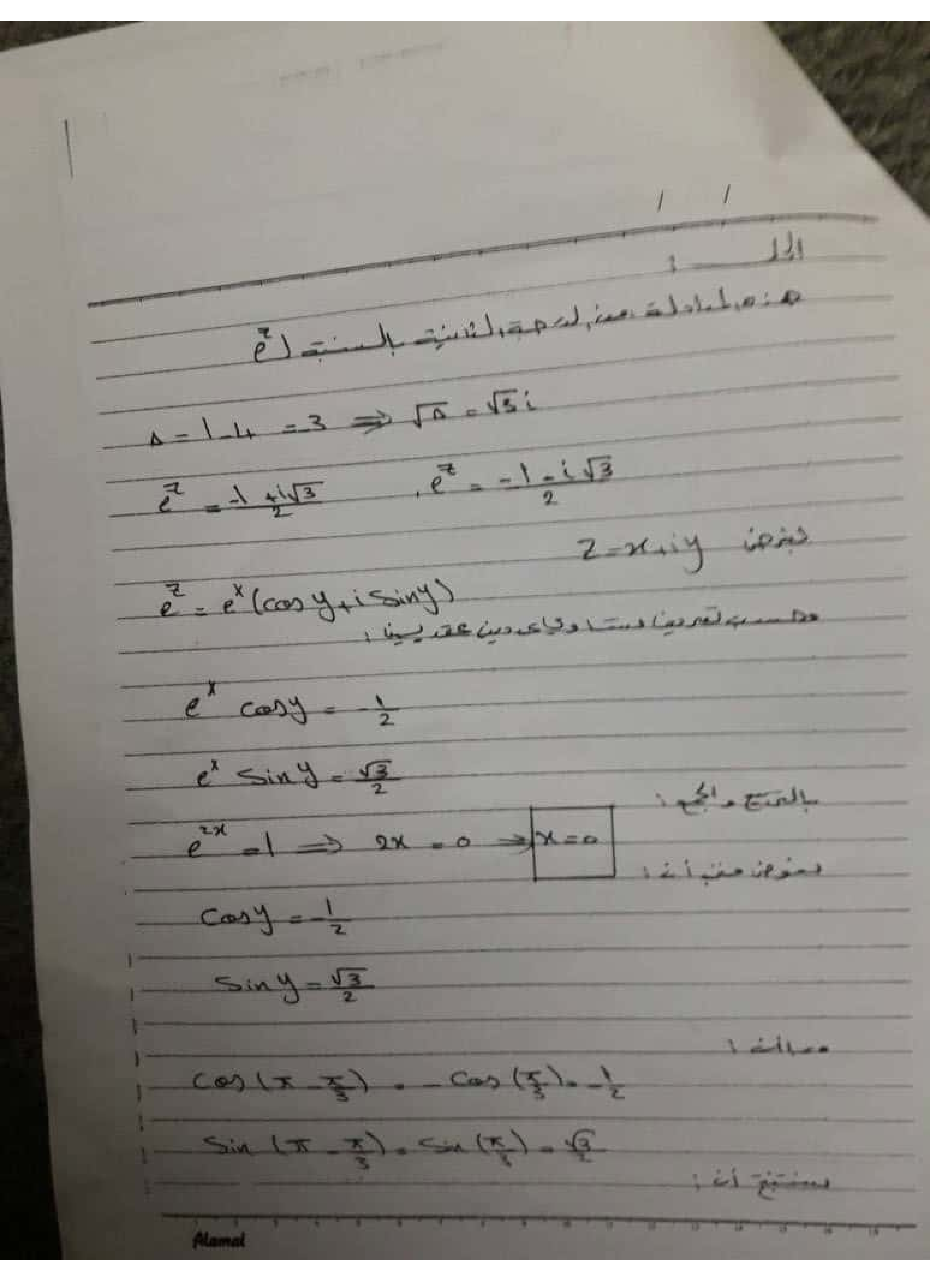
$|e^{-2Z}|<1 \Leftarrow e^{-2x}<e^{0}=1$

$|e^{\text{عدد}}| = e^{\text{القسم الحقيقي له}}$

نفرض أن $|e^{-2Z}|<1$ أي أن $e^{-2x}<1$

$\Rightarrow -2x \ln e < \ln 1 \Rightarrow -2x<0 \Rightarrow 2x>0$

$x>0 \Rightarrow Re Z>0$



الحل:

هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ e^z

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}\,i$$

$$e^z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad e^z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

نفرض $z = x + iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

حسب تعريف المساواة بين عددين عقديين:

$$e^x \cos y = -\frac{1}{2}$$

$$e^x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بالتربيع والجمع:

$$e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

نعوض فنجد أن:

$$\cos y = -\frac{1}{2}$$

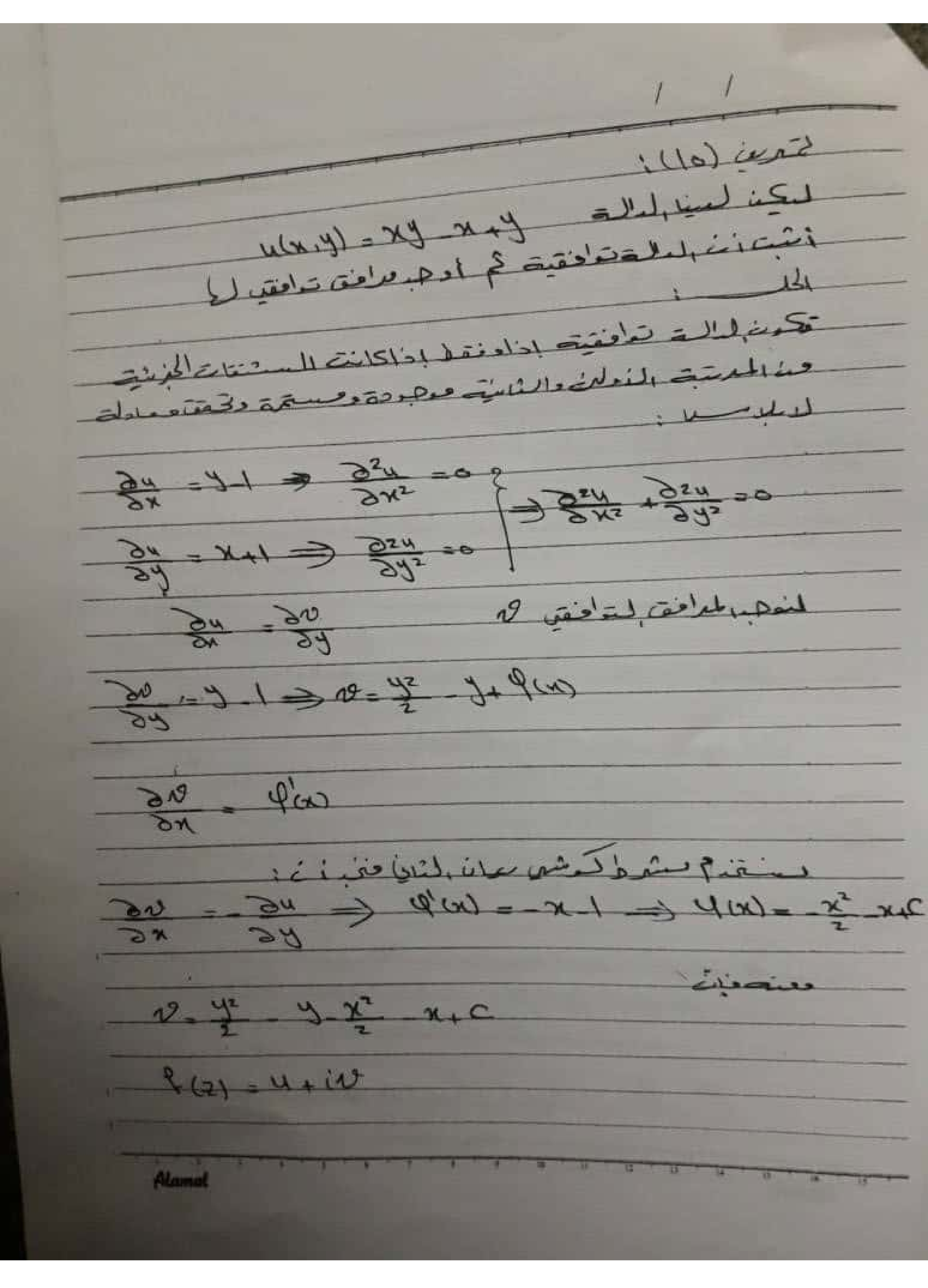
$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ملاحظة:

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج أن:



تمرين (١٥):

لتكن لدينا الدالة

$u(x,y) = xy - x + y$

أثبت أن الدالة توافقية ثم أوجد مرافق توافقي لها

الحل:

تكون الدالة توافقية إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس:

$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

لنوجد المرافق التوافقي v

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = y - 1 \Rightarrow v = \frac{y^2}{2} - y + \varphi(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$

نستخدم شرط كوشي ريمان الثاني فنجد أن:

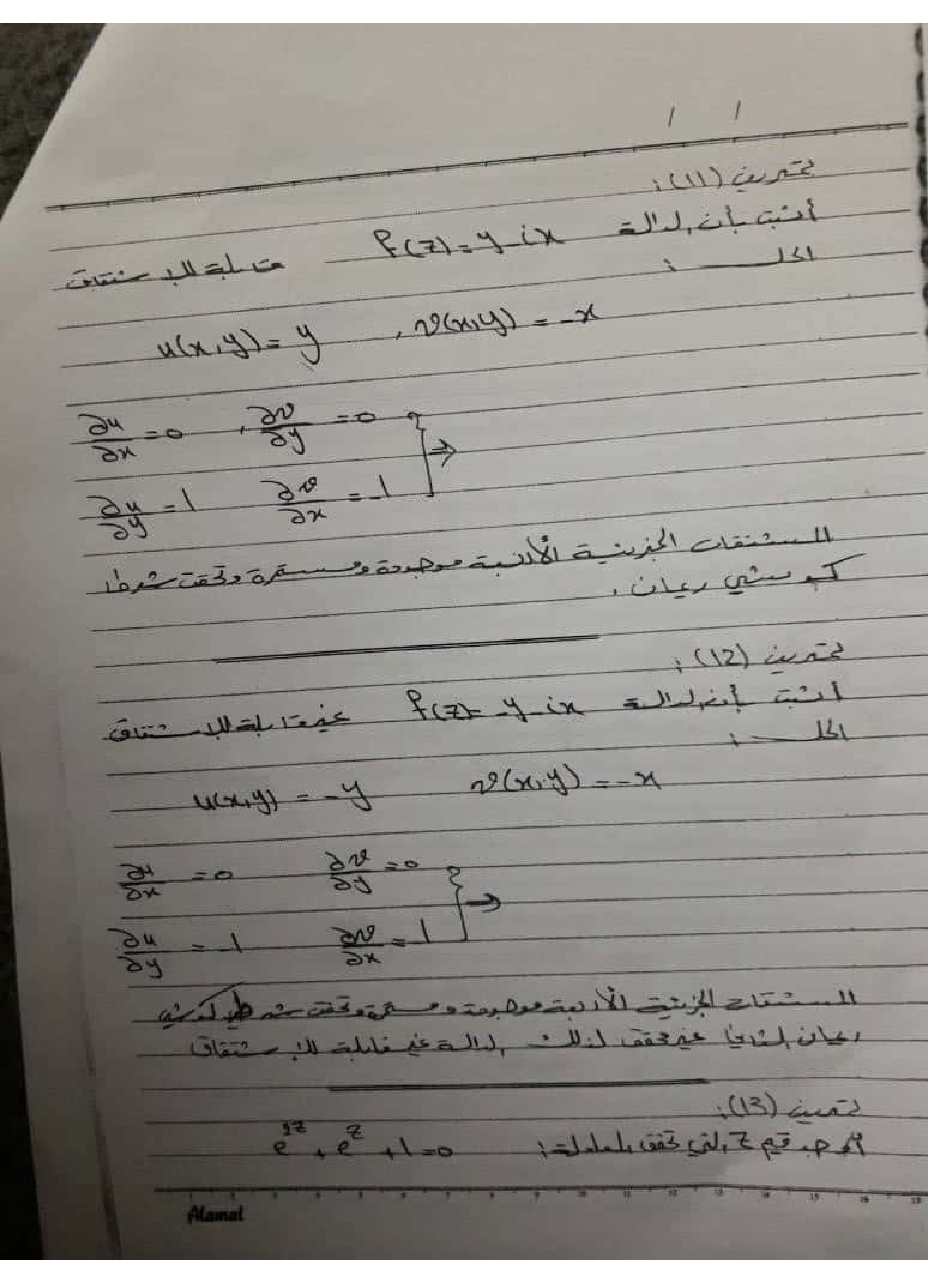
$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \varphi'(x) = -x - 1 \Rightarrow \varphi(x) = -\frac{x^2}{2} - x + c$

ومنه فإن

$v = \frac{y^2}{2} - y - \frac{x^2}{2} - x + c$

$f(z) = u + iv$

Alamal



تمرين (11):

أثبت بأن الدالة $f(z) = y - ix$ قابلة للاشتقاق

الحل:

$u(x,y) = y \quad , \quad v(x,y) = -x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

المشتقات الجزئية الأولية موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي ريمان.

تمرين (12):

أثبت أن الدالة $f(z) = -y - ix$ غير قابلة للاشتقاق

الحل:

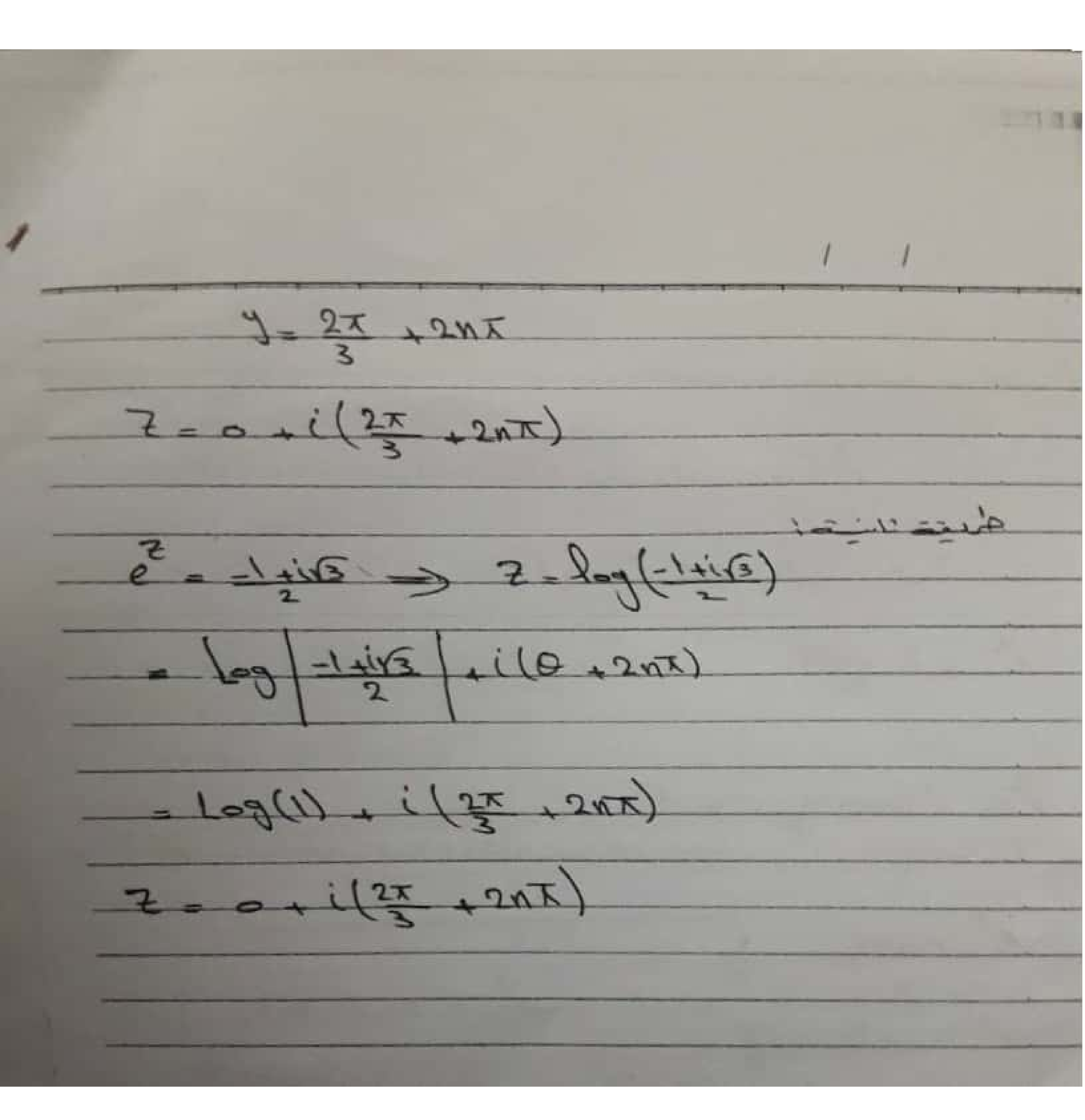
$u(x,y) = -y \quad \quad v(x,y) = -x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

المشتقات الجزئية الأولية موجودة ومستمرة وتحقق شرط كوشي
ريمان الثاني غير محقق لذلك الدالة غير قابلة للاشتقاق

تمرين (13):

أوجد قيم z التي تحقق المعادلة: $e^{2z} + e^{z} + 1 = 0$



$y = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$

$z = 0 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$

طريقة ثانية

$e^{z} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \log\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \log\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| + i(\theta + 2n\pi)$

$= \text{Log}(1) + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$

$z = 0 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$